TalTechi koolimatemaatika olümpiaad

4. mai 2019

Lahendamisaega on 5 tundi.
Ülesande maksimaalne võimalik punktiarv on toodud ülesande teksti lõpus.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun kirjuta iga ülesande lahendus eraldi lehele ja märgi iga lehe ülemisse paremasse nurka sulle antud kood!

1. Ilmajaam prognoosib, et suvel on kõigist päevadest 75% soojad, 75% pilvised ja 60% tuulised. Mitmel protsendil päevadest minimaalselt saab üheaegselt olla soe, pilvine ja tuuline ilm? (*10 p.*)

2. Punktist A punkti B ja punktist B punkti A väljusid samal ajal ühtlase kiirusega kaks kõndijat. Kui punktist A väljunud kõndija oli läbinud poole teest, jäi teisel veel 24 km kõndida. Kui teine kõndija oli läbinud poole teest, jäi esimesel veel 15 km minna. Mitu kilomeetrit jäi teisel kõndijal veel läbida, kui esimene jõudis punkti B? (*15 p.*)

3. Antud on kõverjoon $y = e^x$, sellele tõmmatud puutuja, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja sirge, mis on antud puutujaga risti ja läbib samuti koordinaatide alguspunkti. Leia antud joontega piiratud kujundi pindala. (*15 p.*)

4. Leia kolm positiivset täisarvu, mis moodustavad geomeetrilise jada nii, et kui teist arvu 18 võrra suurendada, tekib aritmeetiline jada ning kui saadud aritmeetilise jada esimest liiget 16 võrra suurendada, tekib uus geomeetriline jada. (*15 p.*)

5. Arvu π väärtuse arvutamiseks on praktikas sobiv kasutada nn Machini valemeid, mis sisaldavad arkustangensit argumendi väikestel väärtustel. Lihtsaim selline valem on

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

   Tõesta antud võrdus. Millise ligikaudse väärtuse saab selle valemi põhjal arvule π, kui kasutada $x \to 0$ korral kehtivat seost $\arctan x \approx x$? (*15 p.*)

6. Jaan soovib investeerida 5000 eurot selliselt, et aasta jooksul saadav tulu oleks 300 eurot. Tal on võimalik valida kahe investeerimisstrateegia A ja B vahel, millest A realiseerub tõenäosusega 0,6 ning B tõenäosusega 0,4. Strateegia A annab tehtud investeeringult tulu 5% aastas ja strateegia B 20% aastas. Kuidas peaks Jaan 5000 eurot nende strateegiate vahel jaotama? (*20 p.*)

   Märkus: võib eeldada, et kui strateegia ei realiseeru, on selle strateegiaga investeeritud rahast saadav tulu 0, kusjuures investeeritud raha jääb Jaanile alles.

7. Aiamaal on taimede kastmiseks silindrikujuline veetünn raadiusega R ja ruumalaga V. Tünn on paigutatud külili ja selle ühele otsatahule on tehtud klaasist vertikaalne vaateava, mis võimaldab kergesti määrata veetaseme kõrgust tünnis. Avalda tünnis oleva vee ruumala, kui veetaseme kõrgus on h. (*20 p.*)

Ülesanne 1

Ilmajaam prognoosib, et suvel on kõigist päevadest 75% soojad, 75% pilvised ja 60% tuulised. Mitmel protsendil päevadest minimaalselt saab üheaegselt olla soe, pilvine ja tuuline ilm? (*10 p.*)

Lahendus

Üheaegselt soe ja pilvine saab olla minimaalselt 50% päevadest. Sel juhul ainult soe või ainult pilvine on 50% päevadest. Selle stsenaariumi realiseerumise korral ainult soe ja tuuline või ainult pilvine ja tuuline saab olla maksimaalselt 50% päevadest. Kuna aga tuuliseid päevi on kokku 60%, siis päevi, kus on üheaegselt soe, pilvine ja tuuline, saab minimaalselt olla 10%.

Ülesanne 2

Punktist A punkti B ja punktist B punkti A väljusid samal ajal ühtlase kiirusega kaks kõndijat. Kui punktist A väljunud kõndija oli läbinud poole teest, jäi teisel veel 24 km kõndida. Kui teine kõndija oli läbinud poole teest, jäi esimesel veel 15 km minna. Mitu kilomeetrit jäi teisel kõndijal veel läbida, kui esimene jõudis punkti B? (*15 p.*)

Lahendus

Olgu punktide vaheline kaugus $2x$ km, punktist A väljunud kõndija kiirus v_1 km/h ja punktist B väljunud kõndija kiirus v_2 km/h. Tekstis kirjeldatakse samadel ajahetkedel toimuvaid sündmusi. Kiiruse (v), teepikkuse (s) ja aja (t) vahelist seost $t = s/v$ kasutades saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{v_1} = \dfrac{2x-24}{v_2} \\ \\ \dfrac{2x-15}{v_1} = \dfrac{x}{v_2} \end{cases}$$

Kuna ükski muutuja ei saa olla 0, siis jagame võrduste vastavad pooled ning saame

$$\frac{x}{2x-15} = \frac{2x-24}{x},$$

$$(2x-24)(2x-15) - x^2 = 0,$$

$$3x^2 - 78x + 360 = 0 \,|\, : 3,$$

$$x^2 - 26x + 120 = 0,$$

$$x_{1;2} = 13 \pm \sqrt{13^2 - 120} = 13 \pm 7.$$

Lahendid on $x_1 = 6$ (ei sobi tekstiga) ja $x_2 = 20$ (sobib). Kahe punkti vahemaa on järelikult 40 km. Kui esimene kõndija läbib $2x$ km, siis teine läbib sama aja jooksul $2 \cdot (2x - 24)$ km, mis on 32 km ja seega jääb tal veel 8 km kõndida.

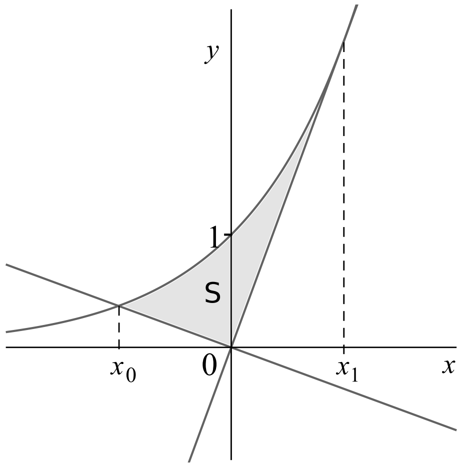
Ülesanne 3

Antud on kõverjoon $y = e^x$, sellele tõmmatud puutuja, mis läbib koordinaatide alguspunkti ja sirge, mis on antud puutujaga risti ja läbib samuti koordinaatide alguspunkti. Leia antud joontega piiratud kujundi pindala. (*15 p.*)

Lahendus

Olgu puutepunkti abtsiss x_1. Koordinaatide alguspunkti läbiva puutuja võrrand on kujul $y = k_1 x$, kus puutuja tõus $k_1 = f'(x_1) = e^{x_1}$. Funktsiooni väärtus puutepunktis on e^{x_1}. Asetades selle puutuja võrrandisse kohal $x = x_1$ saame

$$e^{x_1} = e^{x_1} x_1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1.$$



Puutuja võrrand on seega $y = ex$. Sellega ristuva sirge tõus on $k_2 = -1/k_1 = -e^{-1}$ ja sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti, on järelikult $y = -e^{-1}x$. Sirge ja joone $y = e^x$ lõikepunkti saame süsteemist

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = -e^{-1}x \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad e^x = -e^{-1}x \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -1.$$

Antud joontega piiratud kujundi pindala on seega

$$S = \int_{-1}^{0} \left(e^x + e^{-1}x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(e^x - ex\right) dx =$$

$$= e^x + \frac{x^2}{2e}\Bigg|_{-1}^{0} + e^x - \frac{ex^2}{2}\Bigg|_{0}^{1} = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2e} + e - \frac{e}{2} - 1 = \frac{e}{2} - \frac{3}{2e}.$$

Ülesanne 4

Leia kolm positiivset täisarvu, mis moodustavad geomeetrilise jada nii, et kui teist arvu 18 võrra suurendada, tekib aritmeetiline jada ning kui saadud aritmeetilise jada esimest liiget 16 võrra suurendada, tekib uus geomeetriline jada. (*15 p.*)

Lahendus

Kui geomeetrilise jada 3 järjestikust liiget on a, aq ja aq^2, siis aritmeetilise jada liikmed on a, $aq + 18$ ja aq^2 ning selle jada omadusest lähtudes saame võrrandi $aq + 18 - a = aq^2 - aq - 18$, millest

$$aq^2 - 2aq - a = 36,$$

$$a(q-1)^2 = 36. \tag{1}$$

Uue geomeetrilise jada liikmed on $a+16$, $aq+18$ ja aq^2 ning geomeetrilise jada omadusest saame

$$\frac{aq+18}{a+16} = \frac{aq^2}{aq+18}\bigg| \cdot (a+16)(aq+18)$$

$$(aq+18)^2 = aq^2(a+16)$$

$$\cancel{a^2q^2} + 36aq + 18^2 = \cancel{a^2q^2} + 16aq^2$$

$$16aq^2 - 36aq - (2 \cdot 3 \cdot 3)^2 = 0 \,|\, : a$$

$$16q^2 - 36q - 9 \cdot 36/a = 0 \tag{2}$$

Lahendame võrranditest (1) ja (2) moodustatud süsteemi. Eeldades, et $q \neq 1$ avaldame esimesest võrrandist a ja asetame selle teise võrrandisse.

$$16q^2 - 36q - 9(q-1)^2 = 0$$

$$7q^2 - 18q - 9 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{(2 \cdot 9)^2 + 4 \cdot 7 \cdot 9}}{14} = \frac{18 \pm 2 \cdot 3\sqrt{9+7}}{14} = \frac{18 \pm 24}{14}$$

Lahendid on $q_1 = -3/7$ (ei sobi tekstiga) ja $q_2 = 3$ (sobib). Järelikult $a = 36/4 = 9$. Geomeetrilise jada liikmed on 9, 27 ja 81. (Aritmeetilise jada liikmed on 9, 45 ja 81 ning teise geomeetrilise jada liikmed on 25, 45 ja 81).

Ülesanne 5

Arvu π väärtuse arvutamiseks on praktikas sobiv kasutada nn Machini valemeid, mis sisaldavad arkustangensit argumendi väikestel väärtustel. Lihtsaim selline valem on

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

Tõesta antud võrdus. Millise ligikaudse väärtuse saab selle valemi põhjal arvule π, kui kasutada $x \to 0$ korral kehtivat seost $\arctan x \approx x$? (*15 p.*)

Lahendus

Eeldades, et toodud valem kehtib, saame pii ligikaudseks väärtuseks

$$\pi \approx 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}.$$

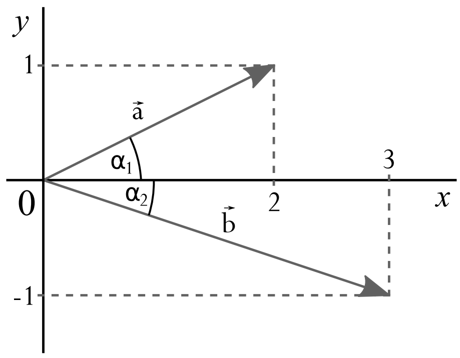
Tõestus 1.
Tähistame $\arctan(1/2) = \alpha_1$ ja $\arctan(1/3) = \alpha_2$ ja leiame tekstis toodud võrduse mõlemast poolest tangensi:

$$\begin{aligned} vp &= \tan(\pi/4) = 1, \\ pp &= \tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2}{1 - \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2} = \\ &= \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2 \cdot 1/3} = 1. \end{aligned}$$

Seega $\tan(\pi/4) = \tan(\alpha_1 + \alpha_2)$, millest järeldub, et $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/4 + n\pi$, kus $n \in Z$. Et iga $x > 0$ korral $0 < \arctan x < \pi/2$, siis $0 < \alpha_1 + \alpha_2 < \pi$ ja võrdus $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/4 + n\pi$ saab kehtida ainult $n = 0$ korral. Seega $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/4$. MOTT

Tõestus 2.
Vaatleme vektoreid

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (2; 1) \\ \vec{b} &= (3; -1) \end{aligned}$$



Jooniselt näeme, et

$$\tan\alpha_1 = 1/2 \implies \alpha_1 = \arctan(1/2),$$
$$\tan\alpha_2 = 1/3 \implies \alpha_2 = \arctan(1/3).$$

Skalaarkorrutise abil saab leida vektoritevahelise nurga koosinuse:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{3^2 + 1^2}} = \\ = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Seega joonise ja saadud võrduse põhjal $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/4$. MOTT

Ülesanne 6

Jaan soovib investeerida 5000 eurot selliselt, et aasta jooksul saadav tulu oleks 300 eurot. Tal on võimalik valida kahe investeerimisstrateegia A ja B vahel, millest A realiseerub tõenäosusega 0,6 ning B tõenäosusega 0,4. Strateegia A annab tehtud investeeringult tulu 5% aastas ja strateegia B 20% aastas. Kuidas peaks Jaan 5000 eurot nende strateegiate vahel jaotama? (*20 p.*)

Märkus: võib eeldada, et kui strateegia ei realiseeru, on selle strateegiaga investeeritud rahast saadav tulu 0, kusjuures investeeritud raha jääb Jaanile alles.

Lahendus 1

Olgu strateegiaga A investeeritud x eurot, siis strateegiaga B investeeritakse $5000 - x$ eurot. Sellisel juhul on oodatav tulu aastas avaldatav kujul

$$0,6 \cdot 0,05x + 0,4 \cdot 0,2(5000 - x).$$

Ülesande tingimuste kohaselt saame seega

$$0,6 \cdot 0,05x + 0,4 \cdot 0,2(5000 - x) = 300,$$
$$0,03x + 400 - 0,08x = 300,$$
$$0,05x = 100,$$
$$x = \frac{100}{0,05} = 2000.$$

Seega strateegiaga A tuleb investeerida 2000 eurot ning strateegiaga B 3000 eurot.

Lahendus 2

Olgu strateegiaga A investeeritud x eurot ja strateegiaga B järelikult $5000 - x$ eurot. Võimalikud on järgmised üksikjuhtumid:

(a) tõenäosusega $0,6 \cdot (1 - 0,4) = 36/100$ realiseerub A ja B ei realiseeru;

(b) tõenäosusega $0,4 \cdot (1 - 0,6) = 16/100$ realiseerub B ja A ei realiseeru;

(c) tõenäosusega $0,6 \cdot 0,4 = 24/100$ realiseeruvad mõlemad;

(d) tõenäosusega $(1 - 0,4)(1 - 0,6) = 24/100$ ei realiseeru kumbki.

Seega 36 juhul sajast teeniks Jaan aastaga $0,05x$ eurot, 16 juhul $0,2 \cdot (5000 - x)$ eurot, 24 juhul $0,05x + 0,2 \cdot (5000 - x)$ eurot ja 24 juhul 0 eurot. Soovi kohaselt peaks ta sajal juhul kokku teenima $100 \cdot 300$ eurot, mis annab võrrandi

$$36 \cdot 0,05x + 16 \cdot 0,2 \cdot (5000 - x) + 24 \cdot (0,05x + 0,2 \cdot (5000 - x)) + 24 \cdot 0 = 100 \cdot 300,$$
$$60 \cdot 0,05x + 40 \cdot 0,2 \cdot (5000 - x) = 100 \cdot 300,$$
$$5x = 10000,$$

millest $x = 2000$. Seega strateegiaga A tuleb investeerida 2000 eurot ning strateegiaga B 3000 eurot.

Ülesanne 7

Aiamaal on taimede kastmiseks silindrikujuline veetünn raadiusega R ja ruumalaga V. Tünn on paigutatud külili ja selle ühele otsatahule on tehtud klaasist vertikaalne vaateava, mis võimaldab kergesti määrata veetaseme kõrgust tünnis. Avalda tünnis oleva vee ruumala, kui veetaseme kõrgus on h. (*20 p.*)

Lahendus

Olgu veetünni horisontaalmõõde l, siis

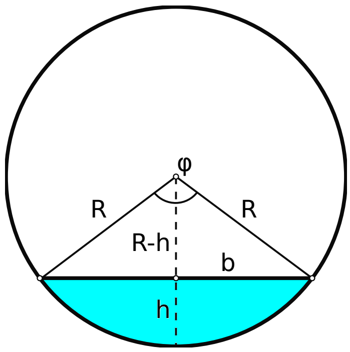
$$V = \pi R^2 l \qquad \Longrightarrow \qquad l = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Vee ruumala on

$$v = S_k \cdot l = \frac{V}{\pi R^2} \cdot S_k,$$

kus S_k on veekihi külgpindala, mis avaldub sektori pindala ja kolmnurga pindala vahena:

$$S_k = \frac{1}{2}R^2\phi - \frac{1}{2}R^2 \sin\phi.$$



Joonis 1: veetünni lõige

Seega

$$v = \frac{V}{2\pi}\left(\phi - \sin\phi\right).$$

Täisnurksest kolmnurgast saame seosed

$$\cos\frac{\phi}{2} = \frac{R-h}{R} \implies \phi = 2\arccos\left(\frac{R-h}{R}\right)$$
$$R^2 = b^2 + (R-h)^2 \implies b = \sqrt{2hR - h^2}$$

ja võrdhaarsest kolmnurgast (pindala põhjal)

$$R^2 \sin\phi = 2b(R-h) \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\phi = \frac{2b(R-h)}{R^2} = \frac{2(R-h)\sqrt{2hR-h^2}}{R^2}.$$

Kõik saadud seosed kehtivad kogu vaadeldavas piirkonnas $h \in [0; 2R]$. Lõplikult saame vee ruumala jaoks valemi

$$v = \frac{V}{\pi}\left[\arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - \frac{(R-h)\sqrt{2hR-h^2}}{R^2}\right].$$

Õigeks loetakse ka vastus kujul

$$v = \frac{V}{2\pi}\left(\phi - \sin\phi\right), \quad \text{kus} \quad \phi = 2\arccos\left(\frac{R-h}{R}\right).$$